VARIABLES Y DISTRIBUCIONES MULTIDIMENSIONALES

VAM I

Introducción

a. Sea el experimento consistente en tomar un argentino al azar y determinar su estatura, peso, y nivel de colesterol en sangre. Este es un ejemplo típico de un experimento aleatorio de resultado compuesto, el cual en este caso consiste en tres números, pudiendo entonces decirse que dicho resultado es una 3 – *pla*. Por ejemplo, un posible resultado de este experimento sería:

(1,72 ; 75 ; 190)

En general, si el resultado de un experimento aleatorio consiste en n números, será expresado por una n – *pla* numérica tal como:

$(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n)$

b. Podría darse el caso de que en el resultado del experimento figuren uno o más componentes que no sean numéricos, por ejemplo en el caso de determinar el sexo, peso y talla de un recién nacido tomado al azar. En este caso el resultado podría ser:

(Varón ; 3,100 ; 0,51)

En estos casos puede obtenerse una respuesta enteramente numérica codificando numéricamente a los componentes no numéricos de la misma. Así, si a “varón” se le asigna un 1 y a “mujer” se le asigna un 2, el resultado anterior tomaría el aspecto:

(1 ; 3,100 ; 0,51)

En lo que sigue se tratará únicamente con experimentos con resultados íntegramente numéricos, o con resultados cuyos componentes no numéricos hayan sido codificados numéricamente.

VAM II

Variables aleatorias *n* – dimensionales

Sea un experimento aleatorio cuyo resultado sea una n – *pla* numérica $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n)$.
A este experimento se le pueden asignar n variables aleatorias $X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n$ que en una realización del experimento asumirán respectivamente los valores $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n$ de la n – *pla* resultante del mismo.
Se dirá que estas n variables aleatorias $X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n$ son simultáneas, y a la n – *pla* de variables aleatorias $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$ se la llamará variable aleatoria n – dimensional.
Si en la realización de un experimento resulta que las variables $X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n$ asumen respectivamente los valores $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n$ se dirá que la variable aleatoria n – dimensional $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$ asume el valor $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n)$.

VAM III

Universo y distribución de probabilidad multidimensionales

a. Dado un experimento aleatorio cuyo resultado es una n – *pla* se define que el universo del mismo es:

$$E^{X_1,\ldots,X_n} = \{\text{Todas las posibles } n - plas\} \qquad \textbf{[1]}$$

El universo $E^{X_1,\ldots,X_n}$ puede ser representado por un espacio euclídeo de n dimensiones.

b. En la figura VAM III.a se indica la representación euclídea de un universo bidimensional E^{XY}, así como la de algunos de los subconjuntos (sucesos) del mismo.

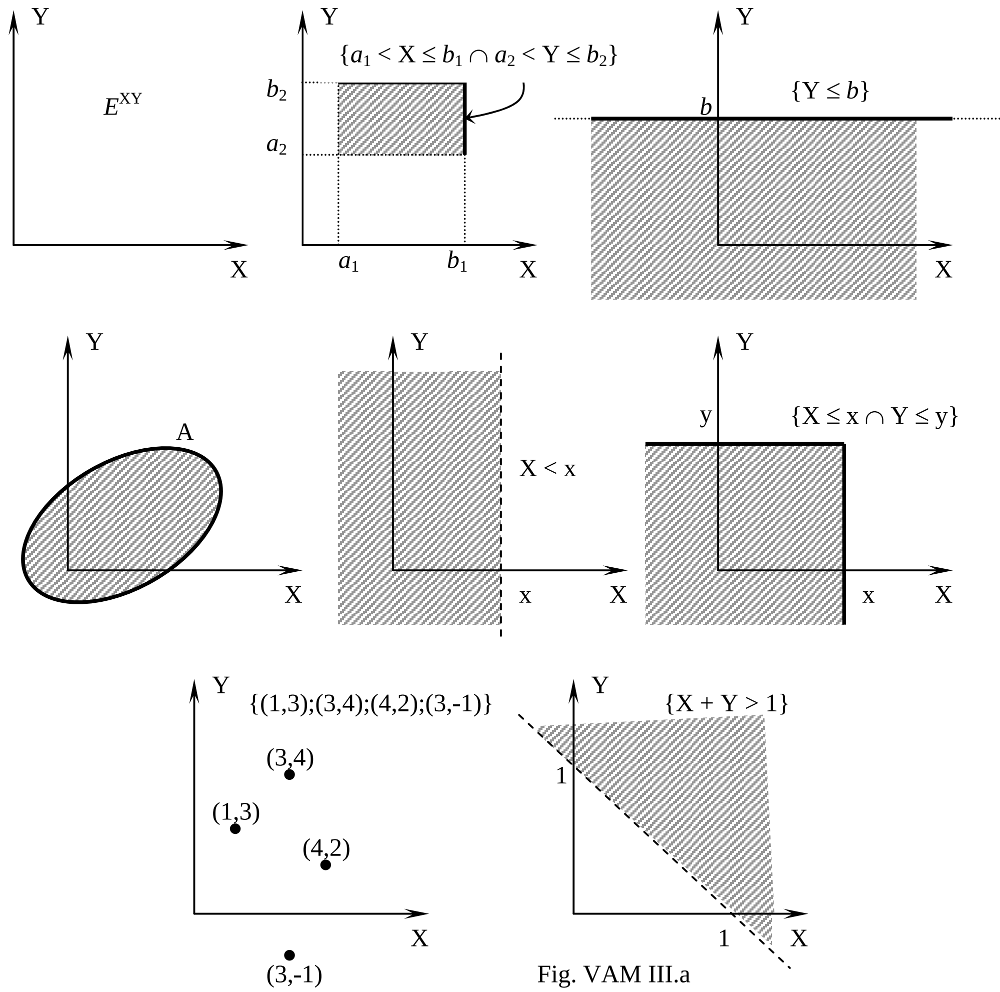


Fig. VAM III.a

c. <u>Se define una distribución de probabilidad sobre $E^{X_1,\ldots,X_n}$, a la que se designará como $D_{E^{X_1,\ldots,X_n}}$ cuando a todos los subconjuntos (sucesos) de $E^{X_1,\ldots,X_n}$ se les asignen números arbitrarios (probabilidades) que cumplan con las tres condiciones fundamentales de una distribución de probabilidad</u> (I, II y III de **[1]** de NP V).

Igual que en el caso de las variables unidimensionales, toda distribución de probabilidades que se defina sobre $E^{X_1,\ldots,X_n}$ ha de ser tal que asigne una probabilidad nula al conjunto de todas las n – *plas* que no pueden aparecer en la realización del experimento correspondiente.

VAM IV

Función de Distribución (F de D) de una variable *n* – dimensional

VAM IV.1

Sea un experimento aleatorio cuyo resultado tiene *n* componentes, y al cual corresponda por lo tanto una variable *n* – dimensional (X_1 ; X_2 ; … ; X_n).

Considérese definida sobre el universo $E^{X_1,\dots,X_n}$ una distribución $D_E^{X_1,\dots,X_n}$.

Dados *n* números cualesquiera, x_1 ; x_2 ; … ; x_n se tiene que:

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\} \qquad \textbf{[1]}$$

es un subconjunto de $E^{X_1,\dots,X_n}$ (formado por todas las *n – plas* tales que su 1er componente sea menor o igual que x_1, … , y que su enésimo componente sea menor o igual que x_n) al cual la distribución $D_E^{X_1,\dots,X_n}$ asigna una cierta probabilidad.

Como dicha probabilidad está unívocamente definida por los números x_1, …, x_n que se hayan elegido se tiene que:

$$P(X_1 \leq x_1 \cap \dots \cap X_n \leq x_n) = F^{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \qquad \textbf{[2]}$$

donde $F^{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ es una función de las variables ordinarias x_1, …, x_n, estando la relación funcional determinada por la distribución de probabilidad $D_E^{X_1,\dots,X_n}$.

<u>A la función $F^{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ se la llamará Función de Distribución Conjunta de las variables X_1, …, X_n; o Función de Distribución de la variable *n* – dimensional (X_1, …, X_n)</u>.

VAM IV.2

a. Se dará un ejemplo de la F. de D. de una variable bidimensional.
Sea el experimento consistente en tirar un dado "honesto" y revolear una moneda.
Asígnese la variable X al resultado del tiro de dado. Asígnese otra variable Y al resultado del revoleo de la moneda, estableciéndose que Y asumirá los valores 0 ó 1 según que salga cara o ceca.
Evidentemente, los únicos resultados posibles que la variable bidimensional (XY) puede asumir son las duplas componentes del conjunto:

$$S = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(4,0),(4,1),(5,0),(5,1),(6,0),(6,1)\} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Se establece sobre E^{XY} una distribución de probabilidad tal que:
· Todas las duplas de S sean equiprobables.
· $P(E^{XY} - S) = 0$
Notar que esto implica que:
1º. Todo subconjunto de E^{XY} que no comprende a ninguna de las duplas indicadas en *S* tendrá una probabilidad nula. Por ejemplo (ver figura VAM IV.a), $P(A) = 0$. **[4]**

2º. $P(X = x \cap Y = y) = \frac{1}{12}$, $\forall\ (x , y) \in S$ **[5]**

3º. Todo subconjunto de E^{XY} que comprende a una o más de las duplas indicadas en S (por ejemplo el B indicado en las figura VAM IV.a) tendrá una probabilidad igual a la suma de las probabilidades individuales de dichas duplas ya que las mismas son sucesos mutuamente excluyentes. **[6]**

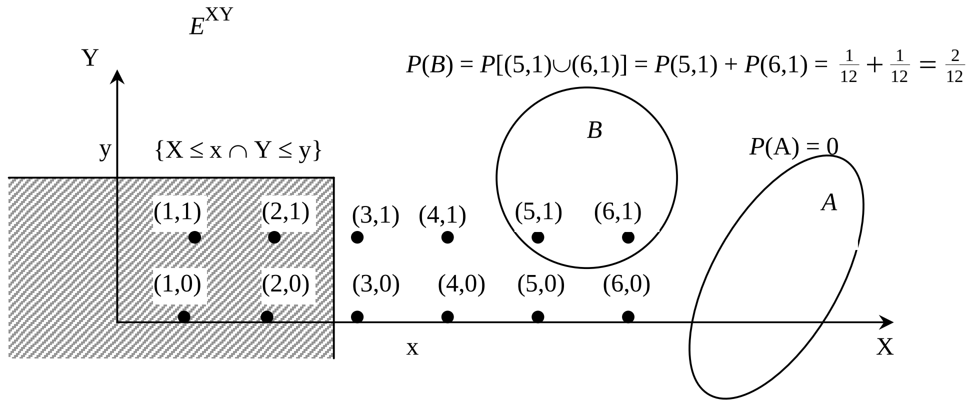


Fig. VAM IV.a

c. Sea el subconjunto de E^{XY} (ver figura VAM IV.a):

$$\{X \le x \cap Y \le y\}\ , \qquad \text{siendo } 2 \le x < 3\ ,\ y > 1$$

Los únicos elementos de S que pertenecen a este conjunto son:

(1,0) (1,1) (2,0) (2,1)

y por lo tanto:

$$F^{XY}(xy) = P(X \le x \cap Y \le y) \overset{\text{Por [6]}}{=} P[(1,0) \cup (1,1) \cup (2,0) \cup (2,1)] =$$
$$= P(1,0) + P(1,1) + P(2,0) + P(2,1) \overset{\text{Por [5]}}{=} 4 \cdot \tfrac{1}{12}$$

Resumiendo:

$$F^{XY}(xy) = 4 \cdot \tfrac{1}{12} \qquad \text{para } 2 \le x < 3\ ,\ y > 1$$

Procediendo de igual manera para otros intervalos resulta la F. de D. graficada en la figura VAM IV.b.

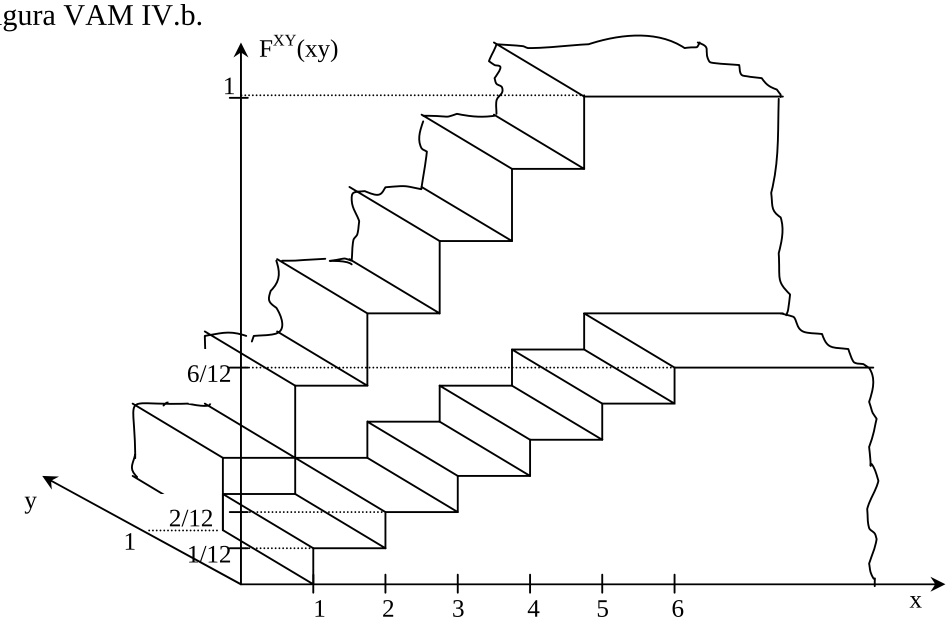


Fig. VAM IV.b

Una manera fácil de representar esta F. de D. sería por "proyección acotada", tal como indica la figura VAM IV.c.

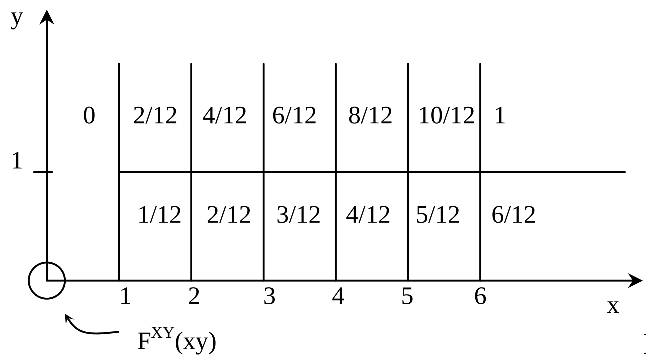


Fig. VAM IV.c

VAM V

<u>Propiedades de las F. de D. bidimensionales</u>

VAM V.1

a. Se probará a continuación que:

$$P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = F^{XY}(x_2y_2) - F^{XY}(x_1y_2) - F^{XY}(x_2y_1) + F^{XY}(x_1y_1) \qquad \textbf{[1]}$$

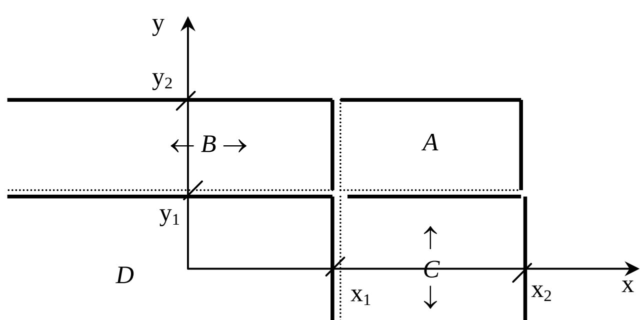


Fig. VAM V.a

Sean los conjuntos mutuamente excluyentes *A*, *B*, *C* y *D* indicados en la figura VAM V.a. Evidentemente se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \\ &= P(A) + [P(B) + P(D)] + [P(C) + P(D)] - P(D) = \\ &= P(A) + P(B \cup D) + P(C \cup D) - P(D) \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} P(X \leq x_2 \cap Y \leq y_2) = {} & P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) + P(X \leq x_1 \cap Y \leq y_2) + \\ & + P(X \leq x_2 \cap Y \leq y_1) - P(X \leq x_1 \cap Y \leq y_1) \end{aligned}$$

es decir que:

$$F^{XY}(x_2y_2) = P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) + F^{XY}(x_1y_2) + F^{XY}(x_2y_1) - F^{XY}(x_1y_1)$$

de donde surge inmediatamente lo indicado en **[1]**.

b. Es evidente que toda F. de D. ha de ser tal que resulten no negativas las probabilidades dadas por **[1]**.
Así, no podría ser una F. de D. la función (ver figura VAM V.b):

$$\Phi^{XY}(xy) = \begin{cases} 0 & \text{para } \{x < 0\} \cup \{y < 0\} \cup \{x + y < 1\} \\ 1 & \text{para } \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \cap \{x + y \geq 1\} \end{cases}$$

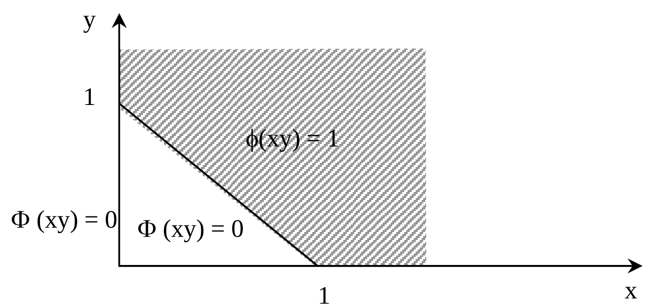


Fig. VAM V.b

ya que entonces sería:

$$P(\tfrac{1}{4} < X \leq 1 \cap \tfrac{1}{4} < Y \leq 1) = \Phi^{XY}(1,1) - \Phi^{XY}(\tfrac{1}{4},1) - \Phi^{XY}(1, \tfrac{1}{4}) + \Phi^{XY}(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}) =$$
$$= 1 - 1 - 1 + 0 = -1$$

VAM V.2

En general, puede demostrarse que las propiedades indicadas en VAU IV para las F. de D. de las variables unidimensionales son generalizables al caso de las F. de D. de las variables multidimensionales.
Así, para el caso de las F .de D. de las variables bidimensionales se tiene que:

1º. $F^{XY}(xy)$ es no decreciente en x y en y **[2]**

2º. $F^{XY}(xy)$ es continua por la derecha en x y en y **[3]**

3º. $F^{XY}(\infty,\infty) = 1$ **[4]**

$F^{XY}(-\infty , y) = F^{XY}(x , -\infty) = F^{XY}(-\infty , -\infty) = 0$ **[5]**

4º. $P(X = x \cap Y = y) = F^{XY}(xy) - F^{XY}(x - 0,y) - F^{XY}(x,y - 0) + F^{XY}(x - 0,y - 0)$ **[6]**

5º..Dada una $F^{XY}(xy)$ queda determinada una distribución de probabilidad sobre todo intervalo de E^{XY}. **[7]**

6º. Además, para $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$ se tiene que (ver [1]):
$F^{XY}(x_2y_2) - F^{XY}(x_1y_2) - F^{XY}(x_2y_1) + F^{XY}(x_1y_1) \geq 0$ **[8]**

VAM VI

<u>Distribuciones Marginales</u>

a. Considérese definida una distribución de probabilidad $D_{E^{XYZ}}$ sobre el espacio muestral E^{XYZ}. Los resultados del experimento correspondiente serán 3 – *plas* (xyz).
Supóngase que al realizar dicho experimento se desestime el valor asumido por la variable Z.
En estas nuevas condiciones los resultados determinarán 2 – *plas* (xy), y por lo tanto se tendrá un espacio muestral E^{XY}. Sobre este E^{XY} existirá una distribución de probabilidad $D_{E^{XY}}$ ya que, según es evidente, a un suceso $A \subset E^{XY}$ (ver figura VAM VI.a) debe corresponder una probabilidad igual a la que $D_{E^{XYZ}}$ asigna al suceso $A' \subset D_{E^{XYZ}}$ formado por todas las 3 – *plas* (xyz) tales que:

1º) $(x , y) \in A$,
2º) z cualquiera.

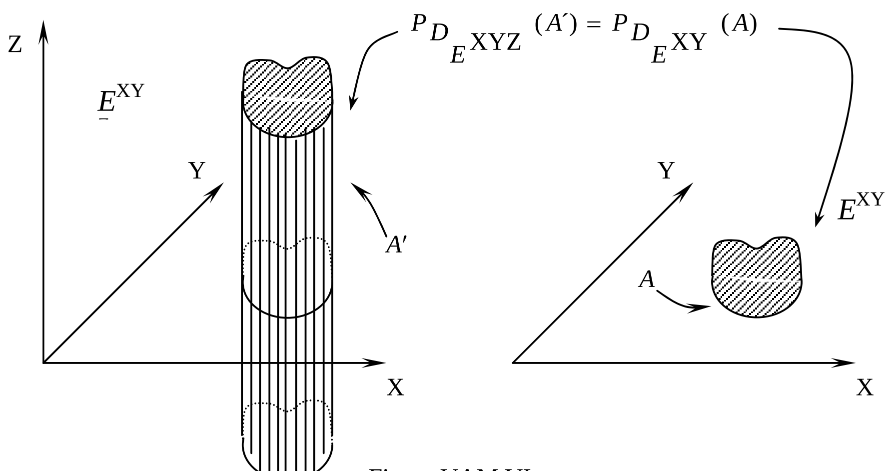


Figura VAM VI.a

La distribución $D_{E^{XY}}$ así originada será llamada marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X e Y.
De manera similar se hubieran podido definir las distribuciones marginales de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X y Z, y sobre Y y Z.

b. Análogamente, si en vez de desestimar el valor asumido por Z se desestiman los valores asumidos por Y y Z, los resultados determinarán números x, y se tendrá un espacio muestral E^{X}, sobre el cual existirá una distribución de probabilidad $D_{E^{X}}$ tal que a un conjunto $B \subset E^{X}$ (ver figura VAM VI.b) corresponde una probabilidad igual a la que $D_{E^{XYZ}}$ asigna al conjunto $B' \subset E^{XYZ}$ formado por todas las 3 – *plas* (xyz) tales que:

1º) $x \in B$,
2º) y, z cualesquiera.

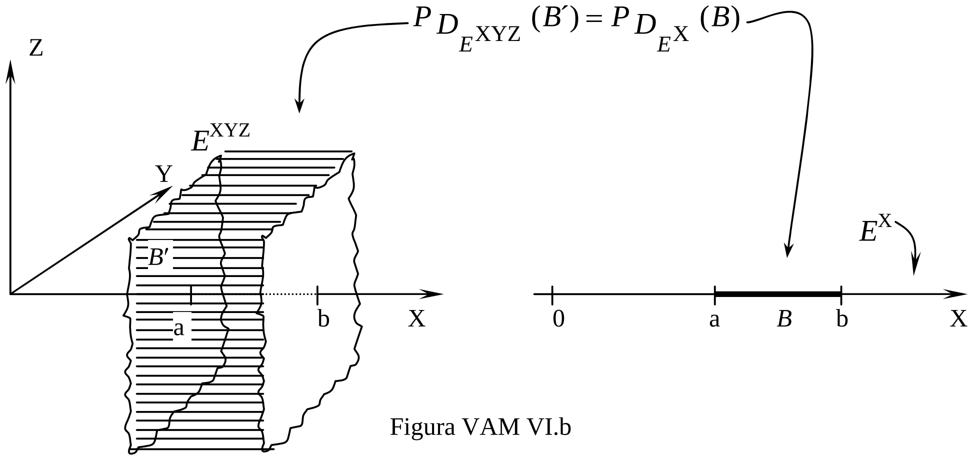


Figura VAM VI.b

La distribución D_{E^X} así originada será llamada marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X. De manera similar se hubiera podido definir las distribuciones marginales de $D_{E^{XYZ}}$ sobre Y y sobre Z.

c. Lo visto con respecto al caso de las tres variables simultáneas X, Y y Z, es fácilmente generalizable al caso general de n variables simultáneas.

d. Considérese definida una distribución de probabilidad $D_{E^{XYZ}}$ sobre el espacio muestral E^{XYZ}. Sea $F^{XYZ}(xyz)$ la F. de D. correspondiente.
"Se ve" (y puede demostrarse fácilmente en forma rigurosa) que:

1º) la F. de D. de la distribución $D_{E^{XY}}$, marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X e Y, es:

$$F^{XY}(xy) = \lim_{z\to\infty} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(x , y , \infty)$$

2º) La F. de D. de la distribución $D_{E^{XZ}}$, marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X y Z, es:

$$F^{XZ}(xz) = \lim_{y\to\infty} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(x , \infty , z)$$

3º) La F. de D. de la distribución $D_{E^{YZ}}$, marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre Y y Z, es:

$$F^{YZ}(yz) = \lim_{x\to\infty} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(\infty , x , z)$$

4º) La F. de D. de la distribución D_{E^X}, marginal de $D_{E^{XYZ}}$ sobre X, es:

$$F^{X}(x) = \lim_{\substack{y\to\infty \\ z\to\infty}} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(x , \infty , \infty)$$

5º) La F. de D. de la distribución $D_E{}^{Y}$, marginal de $D_E{}^{XYZ}$ sobre Y, es:

$$F^{Y}(y) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ z\to\infty}} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(\infty , y , \infty)$$

6º) La F. de D. de la distribución $D_E{}^{Z}$, marginal de $D_E{}^{XYZ}$ sobre Z, es:

$$F^{Z}(z) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F^{XYZ}(xyz) = F^{XYZ}(\infty , \infty , z)$$

VAM VII

Variables aleatorias independientes

a. Sea un universo E^{XY} sobre el cual se ha definido una distribución de probabilidad $D_E{}^{XY}$.

Se define que las variables X e Y son independientes cuando lo son los sucesos {X ≤ x} y {Y ≤ y}, cualesquiera sean los números x e y que se elijan.
Es decir que X e Y son independientes cuando y solo cuando:

$$P(X \le x \cap Y \le y) = P(X \le x)\, P(Y \le y) \qquad ; \qquad \forall\ x , y$$ **[1]**

Notar que:

1º. La probabilidad $P(X \le x)$ puede considerarse como dada por la distribución $D_E{}^{X}$, marginal de $D_E{}^{XY}$ sobre X.

2º. Igualmente, la probabilidad $P(Y \le y)$ puede considerarse como dada por la distribución $D_E{}^{Y}$, marginal de $D_E{}^{XY}$ sobre Y.

Entonces, como:

$$P(X \le x \cap Y \le y) = F^{XY}(xy) \ ; \qquad P(X \le x) = F^{X}(x) \qquad ; \qquad P(Y \le y) = F^{Y}(y)$$

por **[1]** se tiene que:

Las variables X e Y son independientes cuando y solo cuando:

$$F^{XY}(x,y) = F^{X}(x) \cdot F^{Y}(y) \qquad ; \qquad \forall\ x , y$$

siendo:

$F^{X}(x)$ la F. de D. de la distribución marginal $D_E{}^{X}$

$F^{Y}(y)$ la F. de D. de la distribución marginal $D_E{}^{Y}$ **[2]**

b. Se demostrará que:

Si X e Y son independientes, entonces $a_1X + b_1$ y $a_2Y + b_2$ ($a_1>0$, $a_2 > 0$) también lo son. **[3]**

En efecto:

Por ser X e Y independientes

$$P(a_1\text{X} + b_1 \le \text{x} \cap\ a_2\text{Y} + b_2 \le \text{y}) = P\left(\text{X} \le \frac{\text{x}-b_1}{a_1} \cap \text{Y} \le \frac{\text{y}-b_2}{a_2}\right) =$$

$$= P\left(\text{X} \le \frac{\text{x}-b_1}{a_1}\right) \cdot P\left(\text{Y} \le \frac{\text{y}-b_2}{a_2}\right) = P(a_1\text{X} + b_1 \le \text{x}) \cdot P(a_2\text{Y} + b_2 \le \text{y})$$

Resumiendo, si X e Y son independientes entonces:

$$P(a_1\text{X} + b_1 \le \text{x} \cap\ a_2\text{Y} + b_2 \le \text{y}) = P(a_1\text{X} + b_1 \le \text{x}) \cdot P(a_2\text{Y} + b_2 \le \text{y})$$

Con lo que queda probado lo propuesto.
Puede también demostrarse lo antedicho cuando $a_1 < 0$ y/o $a_2 < 0$.

VAM VIII

<u>Aplicaciones</u>

VAM VIII.1

Dado $\text{F}^{\text{XY}}(\text{xy})$ se pide hallar $P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y})$.
Se tiene que (ver figura VAM VIII.a):

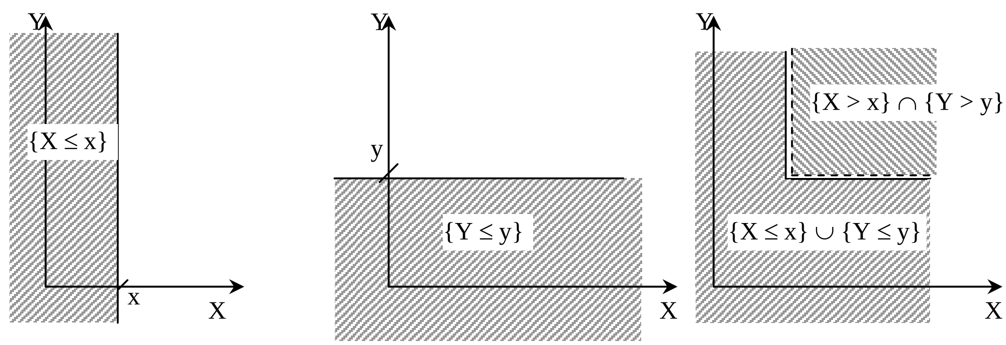


Fig. VAM VIII.a

$E^{\text{XY}} = (\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) \cup (\text{X} \le \text{x} \cup \text{Y} \le \text{y})$
Como los sucesos indicados entre paréntesis son mutuamente excluyentes:
$1 = P(E^{\text{XY}}) = P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) + P(\text{X} \le \text{x} \cup \text{Y} \le \text{y}) =$
$= P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) + [P(\text{X} \le \text{x}) + P(\text{Y} \le \text{y}) - P(\text{X} \le \text{x} \cap \text{Y} \le \text{y})] =$
$= P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) + \text{F}^{\text{X}}(\text{x}) + \text{F}^{\text{Y}}(\text{y}) - \text{F}^{\text{XY}}(\text{xy})$
y por lo tanto:

$$P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) = 1 - \text{F}^{\text{X}}(\text{x}) - \text{F}^{\text{Y}}(\text{y}) + \text{F}^{\text{XY}}(\text{xy})$$

En el caso particular en que X e Y sean independientes:

$$P(\text{X} > \text{x} \cap \text{Y} > \text{y}) = 1 - \text{F}^{\text{X}}(\text{x}) - \text{F}^{\text{Y}}(\text{y}) + \text{F}^{\text{X}}(\text{x})\,\text{F}^{\text{Y}}(\text{y}) = [1 - \text{F}^{\text{X}}(\text{x})][1 - \text{F}^{\text{Y}}(\text{y})]$$

VAM VIII.2

Dado $\text{F}^{\text{XY}}(\text{xy})$ se pide hallar $P(\text{x}_1 < \text{X} < \text{x}_2 \,/\, \text{Y} \le \text{y})$

$$P(x_1 < X < x_2 / Y \le y) = \frac{P(x_1 < X < x_2 \cap Y \le y))}{P(Y \le y)} = \frac{F^{XY}(x_2 - 0, y) - F^{XY}(x_1, y)}{F^{Y}(y)}$$

En el caso particular en que X e Y sean independientes:

$$P(x_1 < X < x_2 / Y \le y) = \frac{F^{X}(x_2 - 0)\, F^{Y}(y) - F^{X}(x_1)\, F^{Y}(y)}{F^{Y}(y)} = F^{X}(x_2 - 0) - F^{X}(x_1)$$

VAM IX

Distribuciones discretas bidimensionales

a. Se dirá que una distribución $D_{E^{XY}}$ efectuada sobre E^{XY} es discreta cuando la variable bidimensional (XY) solo puede asumir una cantidad finita o infinidad numerable de valores (xy) para los cuales sea $P(X = x \cap Y = y) > 0$, debiendo además ser igual a 1 la suma de todas esas probabilidades.
Es decir que debe ser:

$$\sum_{\forall (x_i y_i) / P(X = x_i \cap Y = y_i) > 0} P(X = x_i \cap Y = y_i) = 1 \qquad \textbf{[1]}$$

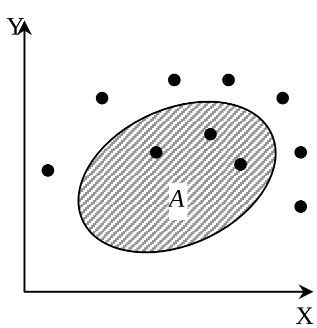
A la variable bidimensional (XY) se la llamará discreta.

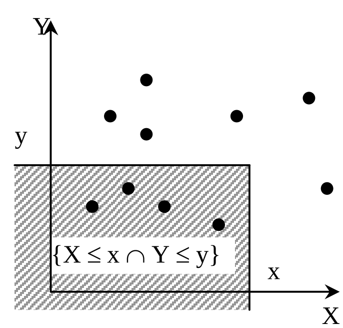
b. Llámese S al conjunto de duplas de E^{XY} cuya probabilidad sea no nula según $D_{E^{XY}}$, es decir:

$$S = \{(x_i y_i) / P(X = x_i \cap Y = y_i) > 0\} \qquad \textbf{[2]}$$

Entonces, tomando un suceso $A \subset E^{XY}$ cualquiera (ver figura VAM IX.a) se tiene que según $D_{E^{XY}}$ es:

$$P(A) = \sum_{\forall (x_i y_i) \in A \cap S} P(X = x_i \cap Y = y_i) \qquad \textbf{[3]}$$





(En ambas figuras los puntos representan componentes de *S*)

Fig. VAM IX.a — Fig. VAM IX.b

Si en **[3]** se toma $A = \{X \le x \cap Y \le y\}$ resulta (ver figura VAM IX.b):

$$F^{XY}(xy) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{\forall (x_i y_j) \in \{X \leq x \cap Y \leq y\} \cap S} P(X = x_i \cap Y = y_j) \qquad \textbf{[4]}$$

c. Sean los sucesos $A = \{X \leq x_1 \cap Y \leq y_1\}$ y $B = \{X \leq x_2 \cap Y \leq y_2\}$ tales que ambos abarquen exactamente los mismos elementos de S (ver figura VAM IX.c).

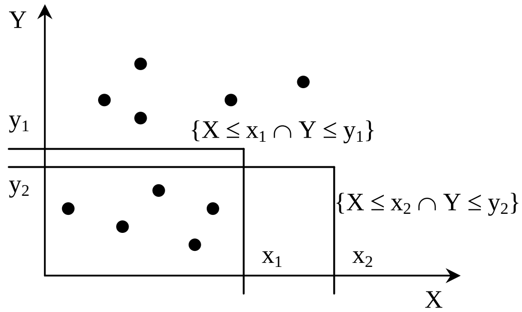


Fig. VAM IX.c

Entonces, como $A \cap S = B \cap S$, por **[4]** se tendrá que en ese caso será:

$$F^{XY}(x_1 y_1) = F^{XY}(x_2 y_2)$$

lo que determina que la F. de D. $F^{XY}(xy)$ tome un aspecto de "escalera", tal como ilustrado en la figura VAM IV.b.

d. Ejemplo:
En un colegio, el profesor de química clasifica a los alumnos de 0 a 4, y el de literatura los clasifica de 0 a 3.
Sea el experimento consistente en tomar un alumno al azar y determinar las clasificaciones que obtuvo en esas dos materias.
Sean Q y L variables aleatorias que asuman respectivamente los valores de las notas que el alumno obtenga en ellas.
Supóngase que un modelo adecuado de la realidad sea adjudicar a la variable bidimensional (Q,L) la distribución de probabilidad $D_E{}^{QL}$ indicada en el cuadro de la figura VAM IX.d.
Se pide:
1º. Hallar las distribuciones marginales $D_E{}^{Q}$ y $D_E{}^{L}$.
2º. Indicar si las variables Q y L son o no son independientes.

l_j \ q_i	0	1	2	3	4	Distribución marginal $D_E{}^{L}$
0	0	0,01	0,03	0,05	0,09	P(L = 0) = Σ = 0,18
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,14	P(L = 1) = Σ = 0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,11	P(L = 2) = Σ = 0,25
3	0,01	0,02	0,06	0,06	0,16	P(L = 3) = Σ = 0,31
Distribución marg	P(Q=0)=Σ = = 0,03	P(Q=1)=Σ = = 0,08	P(Q=2)=Σ = = 0,18	P(Q=3)=Σ = = 0,21	P(Q=4)=Σ = = 0,50	$P(Q=q_i \cap L=l_j)$ (Distribución $D_E{}^{QL}$)

Distribución marginal $D_E{}^{Q}$

Fig. VAM IX.d

Se tiene que:

1º. Evidentemente, las distribuciones marginales $D_{E^{\mathrm{Q}}}$ y $D_{E^{\mathrm{L}}}$ son respectivamente las indicadas en la última fila y la última columna de la figura VAM IX.d.

2º. Para que fueran Q y L independiente debería tenerse que:

$$P(\mathrm{Q} = \mathrm{q}_i \cap \mathrm{L} = \mathrm{l}_j) = P(\mathrm{Q} = \mathrm{q}_i)\, P(\mathrm{L} = \mathrm{l}_j) \quad \forall\, \mathrm{q}_i, \mathrm{l}_j$$

y de movida puede verificarse que:

$$0 = P(\mathrm{Q} = 0 \cap \mathrm{L} = 0) \neq P(\mathrm{Q} = 0)\, P(\mathrm{L} = 0) = 0{,}03 \cdot 0{,}18 = 0{,}0054$$

y esto basta para determinar que Q y L no sean independientes.

VAM X

Distribuciones continuas bidimensionales

a. Se dirá que una distribución bidimensional $D_{E^{\mathrm{XY}}}$ efectuada sobre E^{XY} es continua cuando existe una función uniformemente no negativa $f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})$ tal que siendo (XY) la variable bidimensional asociada a la distribución se tenga que:

$$\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy}) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \int_{-\infty}^{\mathrm{y}} f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{v,w})\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{w}$$

La variable aleatoria (XY) y la F. de D. $\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})$ también serán llamadas continuas. **[1]**

b. Evidentemente, donde $\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})$ sea diferenciable con respecto a x e y se tendrá que:

$$f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy}) = \frac{\partial^2 F^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{y}} \qquad \textbf{[2]}$$

c. Es obvio que:

1º. $P(\mathrm{X} \leq \mathrm{x} \cap \mathrm{Y} \leq \mathrm{y}) = \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy}) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \int_{-\infty}^{\mathrm{y}} f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{v,w})\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{w}$ **[3]**

2º. $P(\mathrm{x}_1 < \mathrm{X} \leq \mathrm{x}_2 \cap \mathrm{y}_1 < \mathrm{Y} \leq \mathrm{y}_2) = \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_2\mathrm{y}_2) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_1\mathrm{y}_2) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_2\mathrm{y}_1) + {}$
$+ \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1) = \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2} \int_{\mathrm{y}_1}^{\mathrm{y}_2} f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{v,w})\, d\mathrm{v}\, d\mathrm{w}$ **[4]**

d. Se tiene que:

$$P(\mathrm{X} = \mathrm{x} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{y}) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x,y}) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x-0,y}) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x,y-0}) + \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x-0,y-0}) \underset{\uparrow}{=} 0 \qquad \textbf{[5]}$$

Ver **[6]** de VAM V — Por ser $\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})$ uniformemente continua

Es decir que en el caso de una distribución continua bidimensional todo resultado tiene "a priori" una probabilidad nula de aparición.

e. Por **[4]** y **[5]** se deduce que en el caso de una distribución bidimensional continua se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} &P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = \\ &\qquad = P(x_1 \leq X \leq x_2 \cap y_1 \leq Y \leq y_2) = \text{Etc, Etc} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[6]}$$

f. Sea un suceso (subconjunto) cualquiera de E^{XY}, por ejemplo el A indicado en la figura VAM X.a.
En base a lo visto más arriba, y con un paso al límite puede probarse que:

$$P(A) = \iint_A f^{XY}(x,y)\, dx\, dy \qquad \textbf{[7]}$$

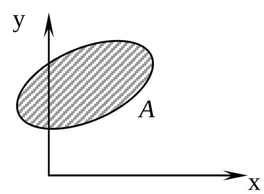


Fig. VAM X.a

g. Se demostrará a continuación que si $D_{E^{XY}}$ es una distribución continua, entonces sus distribuciones marginales D_{E^X} y D_{E^Y} también lo son.
En efecto, si $D_{E^{XY}}$ es continua entonces existe una función $f^{XY}(xy)$ uniformemente no negativa tal que (ver **[1]**):

$$F^{XY}(xy) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f^{XY}(v,w)\, dv\, dw$$

y entonces (ver **d** de VAM VI):

$$F^X(x) = F^{XY}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^{XY}(v,w)\, dw\right] dv \qquad \textbf{[8]}$$

y entonces (ver **[1]** de VAU VII) resulta que:

$$1^{o}.\ f^X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{XY}(v,w)\, dw \quad \Rightarrow \quad f^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{XY}(xy)\, dy \qquad \textbf{[9]}$$

$$2^{o}.\ F^X(x) = \int_{-\infty}^{x} f^X(v)\, dv \quad \Rightarrow \quad F^X(x) = \int_{-\infty}^{x} f^X(x)\, dx \qquad \textbf{[10]}$$

y como $f^{XY}(xy)$ es uniformemente no negativa se tiene por **[9]** que $f^X(x)$ también es uniformemente no negativa, resultando así que D_{E^X} es continua por tener la F de D indicada en **[10]**.
De una manera similar se demostraría que D_{E^Y} también es continua.

VAM XI

<u>Función de probabilidad de una distribución bidimensional</u>

Dada una distribución $D_{E^{XY}}$ sobre un E^{XY} se llama función de probabilidad de la variable a la función:

$$p(x,y) = P(X = x \cap Y = y) = F^{XY}(x,y) - F^{XY}(x\text{-}0,y) - F^{XY}(x,y\text{-}0) + F^{XY}(x\text{-}0,y\text{-}0) \quad \textbf{[1]}$$

Ver **[6]** de VAM V

Esta función será igual a 0 cuando:

1º. $F^{XY}(xy)$ sea continua en x e y ya que entonces es:

$$F^{XY}(x,y) = F^{XY}(x\text{-}0,y) = F^{XY}(x,y\text{-}0) = F^{XY}(x\text{-}0,y\text{-}0)$$

2º. $F^{XY}(xy)$ sea continua en x y discontinua en y ya que entonces es:

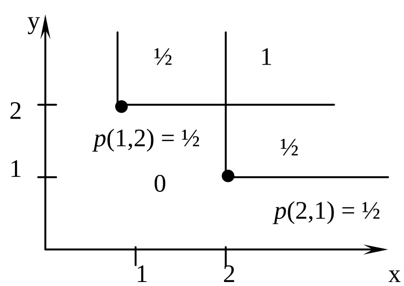
$$F^{XY}(x,y) = F^{XY}(x\text{-}0,y) \qquad , \qquad F^{XY}(x,y\text{-}0) = F^{XY}(x\text{-}0,y\text{-}0)$$

3º. $F^{XY}(xy)$ sea continua en y y discontinua en x ya que entonces es:

$$F^{XY}(x,y) = F^{XY}(x,y\text{-}0) \qquad , \qquad F^{XY}(x\text{-}0,y) = F^{XY}(x\text{-}0,y\text{-}0)$$

Por lo tanto, para que sea $p(xy) > 0$ es condición <u>necesaria</u> que $F^{XY}(xy)$ sea discontinua en x e y.
El que dicha condición <u>no es asimismo suficiente</u> queda ilustrado en el caso de la figura VAM XI.a, donde a pesar de ser $F^{XY}(xy)$ discontinua en x e y en (2,2) se tiene que:

$$p(2,2) = F^{XY}(2,2) - F^{XY}(2\text{-}0,2) - F^{XY}(2,2\text{-}0) + F^{XY}(2\text{-}0,2\text{-}0) = 1 - ½ - ½ + 0 = 0$$



($F^{XY}(xy)$ en proyección acotada)

Fig. VAM XI.a

Evidentemente, la función $p(xy)$ es idénticamente nula en el caso de una distribución continua.

VAM XII

<u>Función de densidad de una distribución bidimensional</u>

a. Lo indicado en **a** de VAU IX es fácilmente extensible al caso de distribuciones bidimensionales.

b. Sea una distribución bidimensional $D_E{}^{\mathrm{XY}}$ <u>continua</u>. Sea la función:

$$\text{Densidad de probabilidad en (xy)} = \lim_{\substack{h\to 0^+\\ k\to 0^+}} \frac{P(\mathrm{x} \le \mathrm{X} \le \mathrm{x}+h \cap \mathrm{y} \le \mathrm{Y} \le \mathrm{y}+k)}{h\,k} =$$

Ver **[6]** de VAM X — Ver **[1]** de VAM V

$$= \lim_{\substack{h\to 0^+\\ k\to 0^+}} \frac{P(\mathrm{x} < \mathrm{X} \le \mathrm{x}+h \cap \mathrm{y} < \mathrm{Y} \le \mathrm{y}+k)}{h\,k} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0^+\\ k\to 0^+}} \frac{\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}+h,\mathrm{y}+k) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x}+h,\mathrm{y}) - \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y}+k) + \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{h\,k}$$

y, evidentemente, <u>donde F^{XY}(xy) sea diferenciable</u> en x e y se tiene que:

Ver **[2]** de VAM X

$$\text{Densidad de probabilidad en (xy)} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})}{\partial \mathrm{x}\partial \mathrm{y}} = f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy})$$

Es por este motivo que la función f^{XY}(xy) que figura en **[1]** de VAM X es llamada por extensión función de densidad.

c. Sea $D_E{}^{\mathrm{XY}}$ una distribución continua bidimensional, y supóngase que las variables X e Y correspondientes a las distribuciones marginales de $D_E{}^{\mathrm{XY}}$ sean independientes.
Entonces por **[2]** de VAM VII se tiene que:

$$\mathrm{F}^{\mathrm{XY}}(\mathrm{xy}) = \mathrm{F}^{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{F}^{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}) \qquad \textbf{[1]}$$

y, como según se vio en **g** de VAM X, $D_E{}^{\mathrm{X}}$ y $D_E{}^{\mathrm{Y}}$ son también continuas se tiene por **[1]** que:

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{x}}\int_{-\infty}^{\mathrm{y}} f^{\mathrm{XY}}(\mathrm{v},\mathrm{w})\,d\mathrm{v}\,d\mathrm{w} = \left(\int_{-\infty}^{\mathrm{x}} f^{\mathrm{X}}(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}\right)\left(\int_{-\infty}^{\mathrm{y}} f^{\mathrm{Y}}(\mathrm{w})\,d\mathrm{w}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mathrm{x}}\int_{-\infty}^{\mathrm{y}} f^{\mathrm{X}}(\mathrm{v})\, f^{\mathrm{Y}}(\mathrm{w})\,d\mathrm{v}\,d\mathrm{w}$$

Como este resultado es válido para cualquier (xy) que se elija, se tiene que:

$$f^{XY}(v,w) = f^{X}(v)\, f^{Y}(w) \text{ si X e Y son independientes}$$

o, si se prefiere:

$$f^{XY}(xy) = f^{X}(x)\, f^{Y}(y) \text{ si X e Y son independientes} \qquad \textbf{[2]}$$

d. Ejemplo:
Sea V y W las variables aleatorias correspondientes respectivamente a la vida de dos lámparas de luz <u>de distintas procedencias</u>. Sean:

$$F^{V}(v) = \begin{cases} 0 & \text{para } v \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{v}{1000}} & \text{para } v > 0 \end{cases} \qquad F^{W}(w) = \begin{cases} 0 & \text{para } w \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{w}{1200}} & \text{para } w > 0 \end{cases} \qquad \textbf{[3]}$$

Se pide:
1º. Hallar la f. de d. de la distribución bidimensional $D_E$vw .
2º. La probabilidad de que ambas lámparas duren más de 1500 horas.

Para empezar (ver **[2]** de VAU VII):

$$f^{V}(v) = \begin{cases} 0 & \text{para } v \leq 0 \\ \dfrac{v}{1000} e^{-\frac{v}{1000}} & \text{para } v > 0 \end{cases} \qquad f^{W}(w) = \begin{cases} 0 & \text{para } w \leq 0 \\ \dfrac{w}{1200} e^{-\frac{w}{1200}} & \text{para } w > 0 \end{cases}$$

y como V y W son independientes, por **[1]** se tiene que:

$$f^{VW}(vw) = \begin{cases} 0 & \text{para } v \leq 0 \vee w \leq 0 \\ \dfrac{v}{1000} e^{-\frac{v}{1000}} . \dfrac{w}{1200} e^{-\frac{w}{1200}} & \text{para } v > 0 \wedge w > 0 \end{cases}$$

Por otra parte, y siempre por ser V y W independientes:

$$P(V \geq 1500 \cap W \geq 1500) = P(V \geq 1500)\, P(W \geq 1500) =$$

$$= [1 - F^{V}(1500)][1 - F^{W}(1500)] = e^{-\frac{1500}{1000}} e^{-\frac{1500}{1200}} = e^{-2,75} = 0,064$$

VAM XIII

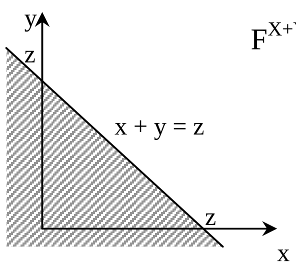
Suma de variables aleatorias

a. Sea una variable aleatoria bidimensional (XY). Si en la realización de un experimento se suman los valores que asuman X e Y se obtendrá un resultado aleatorio al cual se asociará una nueva variable a la que se llamará X + Y.
(Tener en cuenta en lo que sigue que el símbolo X + Y no es más que la notación de una nueva variable).

b. Suponiendo conocida la distribución de probabilidad $D_{E^{XY}}$ sobre E^{XY}, para hallar la F. de D. de X + Y, es decir:

$$F^{X+Y}(z) = P(X + Y \leq z)$$

bastará hallar la probabilidad que $D_{E^{XY}}$ asigna al subconjunto de E^{XY} formado por todas las duplas (xy) tales que x + y ≤ z (ver figura VAM XIII.a).



$F^{X+Y}(z) = P(X + Y \leq z)$ = Probabilidad asignada por $D_{E^{XY}}$ a la región sombreada de la figura VAM XIII.a (frontera inclusive).

Fig. VAM XIII.a

c. En el caso de una distribución discreta:

$$F^{X+Y}(z) = \sum_{\forall (x_i y_j)/(x_i + y_j \leq z) \cap [P(X=x_i \cap Y=y_j)>0]} P(X = x_i \cap Y = y_j) \qquad \textbf{[1]}$$

d. En el caso de una distribución continua:

$$F^{X+Y}(z) = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq z\}} f^{XY}(x,y)\ dx\, dy \qquad \textbf{[2]}$$

VAM XIV

Producto de variables aleatorias

a. Sea una variable aleatoria bidimensional (XY). Si en la realización de un experimento se efectúa el producto de los valores asumidos por X y por Y se obtendrá un resultado aleatorio al cual se asociará una nueva variable a la que se llamará XY.
(Tener bien en cuenta que el símbolo XY no es más que la notación de una nueva variable).

Suponiendo conocida la distribución que $D_E{}^{XY}$ sobre E^{XY}, para hallar la F. de D. de XY, es decir:

$$F^{XY}(z) = P(XY \le z)$$

bastará hallar la probabilidad que $D_E{}^{XY}$ asigna al subconjunto de E^{XY} formada por todas las duplas (xy) tales que x·y ≤ z (ver figura VAM XIV.a).

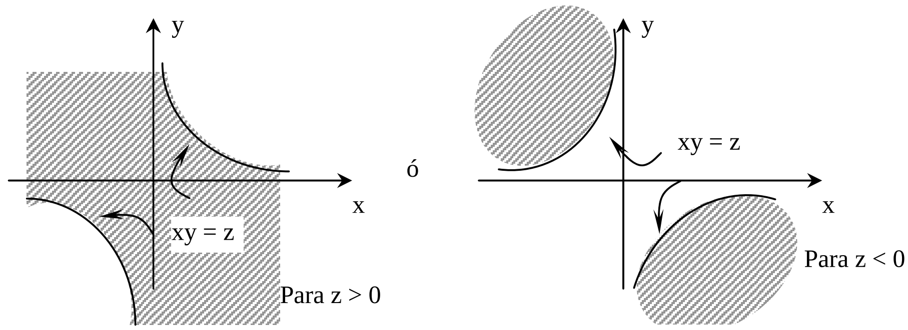


Fig. VAM XIV.a

b. En el caso de una distribución discreta:

$$F^{XY}(z) = \sum_{\forall (x_i y_j)/(x_i \cdot y_j \le z) \cap [P(X=x_i \cap Y=y_j)>0]} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

c. En el caso de una distribución continua:

$$F^{XY}(z) = \iint_{\{(x,y)/x\cdot y \le z\}} f^{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

VAM XIV

<u>**Aplicaciones**</u>

a. Sean dos números elegidos al azar entre 0 y 1 (por ejemplo por el método del reloj indicado en VAU V.2). Sean X e Y variables independientes asociadas a los números antedichos. Se pide hallar las F. de D. de:

$X - Y$ y de $|Y - X|$

b. Tal como visto en VAU V.2:

$$F^X(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{para } x \ge 1 \end{cases} \qquad F^Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < 0 \\ y & \text{para } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{para } y \ge 1 \end{cases}$$

y por lo tanto resulta:

$$f^X(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{para todo otro valor de x} \end{cases} \qquad f^Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para todo otro valor de y} \end{cases}$$

Entonces, como X e Y son independientes, por lo indicado en **[1]** de VAM XII se tiene que:

$$f^{XY}(xy) = f^{X}(x)\, f^{Y}(y) = \begin{cases} 1 & \text{para todo (xy) tal que } 0 < x < 1 \cap 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para todo otro (xy)} \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

c. Se tratará de calcular la F. de D. de X – Y .

Póngase:

$$Z = X - Y$$

Se tiene que:

$$[X - Y \le z] \Leftrightarrow [Y \ge X - z]$$

y entonces:

$$F^{Z}(z) = P(Z \le z) = \iint_{A} f^{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

siendo A la región indicada en la figura VAM XIV.a.

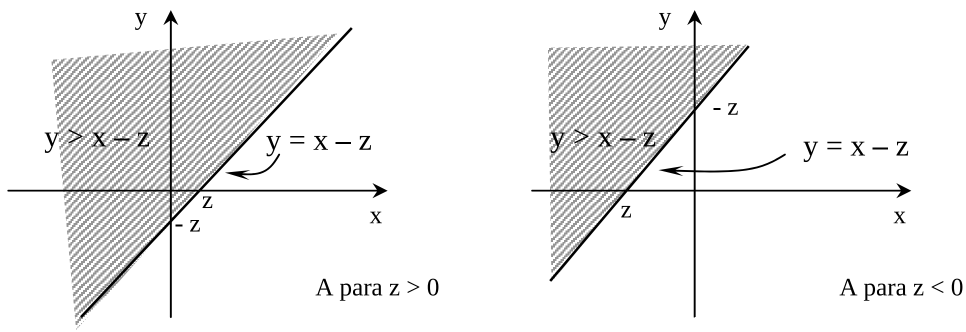
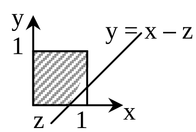


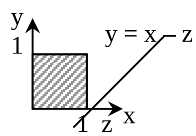
Fig. VAM XIV.a

Entonces, teniendo en cuenta a **[1]**:

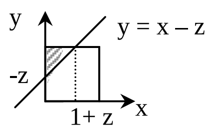
1º. Para $0 \le z < 1$: $F^{Z}(z) = \iint 1\, dx\, dy = 1 - \dfrac{(1-z)^2}{2}$



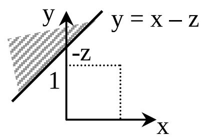
2º. Para $z \ge 1$: $F^{Z}(z) = \iint 1\, dx\, dy = 1$



Para $-1 \le z < 0$: $F^{Z}(z) = \iint 1\, dx\, dy = \int_0^{1+z} dx \int_{x-z}^{1} dy = \dfrac{(1-z)^2}{2}$



Para z < -1: $F^Z(z) = \iint 0\, dx\, dy = 0$



d. Se tratará de calcular la F. de D. de $|Y - X|$.

Póngase:

$$Z = |Y - X|$$

Entonces:

1º. $F^Z(z) = 0$ para $z < 0$ ya que $|Y - Z|$ es siempre no negativa.

2º. Para $0 \le z < 1$:

$F^Z(z) = P(Z \le z) = P(-z \le Y - X \le z) = P(X - z \le Y \le X + z)$.

Es decir que:

$$F^Z(z) = \iint_B f^{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

Siendo B la región indicada en la figura VAM XIV.b.

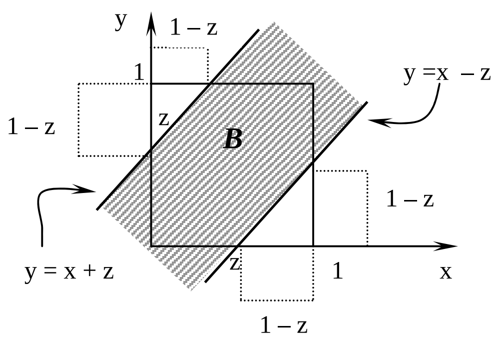
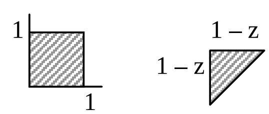


Fig. VAM XIV.b

Entonces, teniendo en cuenta a **[1]**:

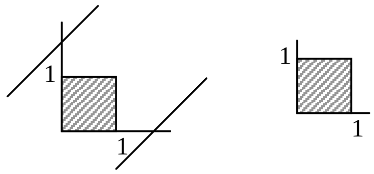
$$F^Z(z) = \iint_B f^{XY}(x, y)\, dx\, dy = \iint 1\, dx\, dy - 2\iint 1\, dx\, dy = 1 - 2\frac{(1-z)^2}{2} = 1 - (1-z)^2$$



para $0 < z < 1$

3º. Por último:

$$F^{Z}(z) = \iint f^{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1 \qquad \text{para } z \geq 1$$



VAM XV

<u>Teorema</u>

a. Generalizando lo visto en **a** de VAM XIII:
Sea una variable aleatoria multidimensional (X_1, …, X_n). Si en la realización de un experimento se suman los valores que asuman X_1, …, X_n, se obtendrá un resultado aleatorio al cual se asociará una nueva variable a la que se llamará $X_1 + \ldots + X_n$.

b. Puede demostrarse (ver Apéndice A.VAM III) que:

$$m_{X_1 + \ldots + X_n} = m_{X_1} + \ldots + m_{X_n}$$

siendo las variables X_1, …, X_n <u>cualesquiera</u> (independientes o no independientes y discretas o continuas), pero a condición de que todas ellas tengan valor medio. **[1]**

c. Puede demostrarse (ver Apéndice A. VAM V) que:

$$\sigma^2_{X_1 + \ldots + X_n} = \sigma^2_{X_1} + \ldots + \sigma^2_{X_n}$$

<u>a condición de que X_1, …, X_n sean independientes</u> y tengan todas varianza.
La demostración es válida tanto para variables discretas como para variables continuas. **[2]**

d. Estos dos teoremas son sumamente importantes. En lo que sigue se hará un uso intensivo de los mismos.

VAM XVI

<u>Valor medio y varianza de la media aritmética de *n* variables aleatorias, todas independientes entre sí y tales que todas tengan el mismo valor medio y la misma varianza</u>

Sean X_1, …, X_n variables aleatorias todas independientes entre sí y tales que:

$$m_{X_1} = \ldots = m_{X_n} = m$$

$$\sigma^2_{X_1} = \ldots = \sigma^2_{X_n} = \sigma^2 \qquad \textbf{[1]}$$

Sea:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \quad + X_n)$$

Por **[4]** de VAU XI y **[1]** de VAM XV.

$$m_{\overline{X}} = \frac{1}{n}(m_{X_1} + \ldots + m_{X_n}) = \frac{1}{n} n\, m = m \qquad \textbf{[2]}$$

(Notar que este resultado es válido tanto cuando X_1, ..., X_n son independientes como cuando no lo son).

Por **[4]** de VAU XII y por **[2]** de VAM XV:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2_{\overline{X}} &= \sigma^2_{\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)} = \frac{1}{n^2}\sigma^2_{(X_1+\ldots+X_n)} = \frac{1}{n^2}(\sigma^2_{X_1} + \quad + \sigma^2_{X_n}) = \\ &= \frac{1}{n^2} n\ \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}\right\} \textbf{[3]}$$

(Solo cuando X_1, …, X_n son independientes)

Resumiendo:

$$m_{\overline{X}} = m \qquad \textbf{[4]}$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\text{; (Si } X_1, \ldots, X_n \text{ son independientes)} \qquad \textbf{[5]}$$

Esto último implica que:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{; (Si } X_1, \ldots, X_n \text{ son independientes)} \qquad \textbf{[6]}$$

VAM XVII

<u>Consecuencia principal del teorema de Tchebycheff</u>

a. Sean *n* repeticiones de un mismo experimento aleatorio a las cuales se asocian las variables X_1, …, X_n.

Por tratarse de repeticiones de un mismo experimento se tiene que:

$$m_{X_1} = \ldots = m_{X_n} = m \qquad \text{y} \qquad \sigma^2_{X_1} = \ldots = \sigma^2_{X_n} = \sigma^2$$

y poniendo:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \qquad \textbf{[1]}$$

por **[2]** y **[3]** de VAM XVI se tiene que:

$$m_{\overline{X}} = m \qquad \text{y} \qquad \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} \qquad \textbf{[2]}$$

b. Supóngase que interese conocer un *n* (cantidad de repeticiones del experimento) que asegure que dada una probabilidad arbitraria α y un ε arbitrario se tenga que:

$$P(|\overline{X}-m| < \varepsilon) > \alpha \qquad \textbf{[3]}$$

Por **[1]**, **[2]**, y por **[1]** de VAU XIII se tiene que:

$$P(|\overline{X}-m| > k\,\sigma/\sqrt{n}) < 1/k^2$$

$$P(|\overline{X}-m| > k\,\sigma/\sqrt{n}) + \eta = 1/k^2 \qquad , \eta > 0$$

$$P(|\overline{X}-m| \leq k\,\sigma/\sqrt{n}) = 1 - 1/k^2 + \eta > 1 - 1/k^2 \qquad \textbf{[4]}$$

Tómese:

1º. $1 - 1/k^2 = \alpha \;\Rightarrow\; k = \sqrt{1/(1-\alpha)}$ **[5]**

2º. $\varepsilon = k\sigma/\sqrt{n} = \sqrt{1/(1-\alpha)}\cdot\sigma/\sqrt{n} \Rightarrow n = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\dfrac{1}{1-\alpha}$ **[6]**

Entonces por **[4]**, **[5]** y **[6]** resulta que se cumplirá lo indicado en **[3]** cuando se tome:

$$n = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{1-\alpha}$$

Supóngase que se tome *n'* > *n*. Entonces por **[6]** se tiene que:

$$n' = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{1-\alpha'} > n = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha'} > \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha' > \alpha$$

Entonces puede decirse que:

Para $n > \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\dfrac{1}{1-\alpha}$ es $P(|\overline{X}-m| < \varepsilon) > \alpha$ **[7]**

Esta fórmula **[7]** constituye una justificación de la frecuencia relativa de aparición de un suceso como probabilidad del mismo.
Sin embargo, notar que dicha fórmula da únicamente una probabilidad y no una certeza. Las objeciones a la definición empírica de probabilidad dadas en NP III siguen en pie.

VAM XVIII

Observación

Este capítulo pretende dar una idea acerca de los conceptos básicos referentes a las variables y distribuciones multidimensionales, pero casi toda la presentación ha sido hecha en base al caso bidimensional.
Se ha procedido así para facilitar la asimilación de dichos conceptos básicos, y teniendo en cuenta que la extensión de lo visto al caso multidimensional es casi obvia (aunque en ciertas circunstancias esta extensión requeriría procedimientos algo más refinados).

APÉNDICES

A.VAM I

Teorema

a. Sea un experimento al cual se asocia la variable aleatoria X. Sea:

$$Y = \varphi(X) \qquad \textbf{[1]}$$

donde φ es una función uniforme y definida para todo valor que puede asumir X.
Se demostrará que:

$$m_{\varphi(X)} = \sum_{\forall x_i \,/\, P(X=x_i)>0} \varphi(x_i) P(X = x_i) \qquad \text{para X discreta} \qquad \textbf{[2]}$$

$$m_{\varphi(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f^{X}(x)\, dx \qquad \text{para X continua} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Se considerará primero el caso en que X sea discreta.
Sea por ejemplo el caso considerado en la figura A.VAM I.a.

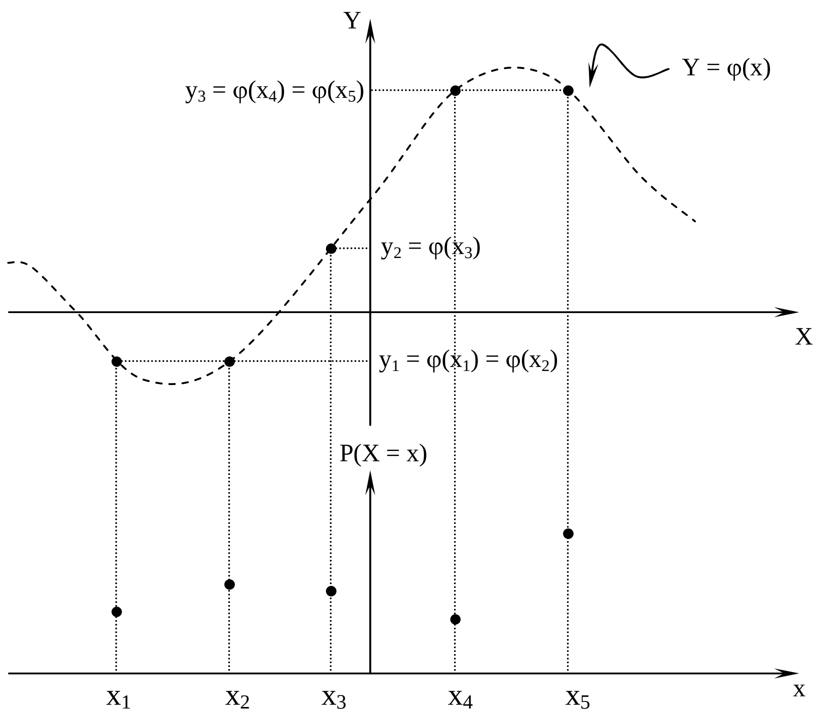


Fig. A.VAM I.a

Se tiene que (ver figura):

$$m_Y = m_{\varphi(X)} = y_1\, P(Y = y_1) + y_2\, P(Y = y_2) + y_3\, P(Y = y_3) =$$

$$= y_1\, P[(X = x_1) \cup (X = x_2)] + y_2\, P(X = x_3) + y_3\, P[(X = x_4) \cup (X = x_5)] =$$

$= \varphi(x_1)P(X{=}x_1) + \varphi(x_2)P(X{=}x_2) + \varphi(x_3)P(X{=}x_3) + \varphi(x_4)P(X{=}x_4) + \varphi(x_5)P(X{=}x_5) =$

$$= \sum_{\forall x_i \,/\, P(X=x_i)>0} \varphi(x_i)P(X = x_i)$$

Evidentemente, el razonamiento empleado en este ejemplo puede ser generalizado a un caso cualquiera.
Con lo que queda demostrado lo indicado en **[2]**.

c. Se considerará ahora el caso en que X sea continua.
Sea por ejemplo el caso indicado en la figura A.VAM I.b.

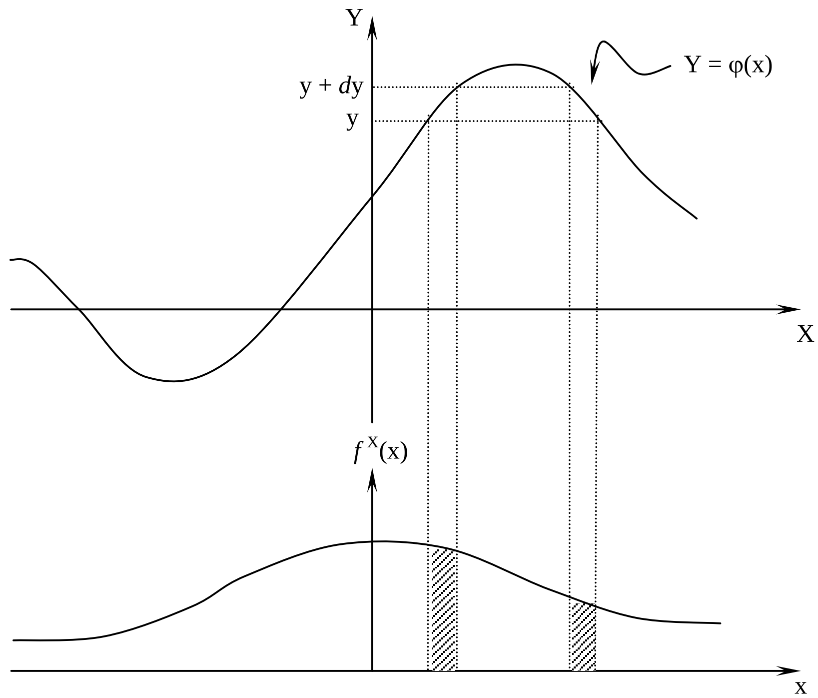


Fig. A.VAM I.b

Evidentemente se tiene que:

P (y < Y ≤ y + dy) = Área de superficie sombreada en la parte inferior de la figura

y entonces:

$$m_{\varphi(X)} = m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f^{Y}(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y P(y < Y \le y + dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f^{X}(x)\, dx$$

Con lo que queda probado lo indicado en **[3]**.

A.VAM II

Generalización

Evidentemente, cabe generalizar las fórmulas **[2]** y **[3]** de A.VAM I a funciones de más de una variable. Así si:

$$Z = \varphi(XY) \qquad \textbf{[1]}$$

se tiene:

$$m_{\varphi(XY)} = m_Z = \sum_{\forall(x_i y_j)/P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} \varphi(x_i y_j) P(X = x_i \cap Y = y_j) \text{ para (XY) discreta} \qquad \textbf{[2]}$$

$$m_{\varphi(XY)} = m_Z = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \varphi(xy) f^{XY}(xy)\, dx\, dy \qquad \text{para (XY) continua} \qquad \textbf{[3]}$$

A.VAM III

a. Se demostrará que:

$$m_{X+Y} = m_X + m_Y \qquad \underline{\text{Sean X e Y independientes o no}} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Para variable discreta, por **[2]** de A.VAM II, poniendo:

$$Z = \varphi(X,Y) = X + Y$$

resulta:

$$m_{X+Y} = m_Z = \sum_{\forall(x_i y_j)/P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} (x_i + y_j) P(X = x_i \cap Y = y_j) =$$

$$= \sum_{\forall(x_i y_j)/P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} x_i P(X = x_i \cap Y = y_j) + \sum_{\forall(x_i y_j)/P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} y_j P(X = x_i \cap Y = y_j) =$$

$$= \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i \underbrace{\sum_{\forall y_j / P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} P(X = x_i \cap Y = y_j)}_{P(X=x_i)} +$$

$$+ \sum_{\forall y_j / P(Y=y_j)>0} y_j \underbrace{\sum_{\forall x_i / P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} P(X = x_i \cap Y = y_j)}_{P(Y=y_j)} =$$

$$= \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i P(X = x_i) + \sum_{\forall y_j / P(Y=y_j)>0} y_j P(Y = y_j) = m_X + m_Y$$

Con lo cual queda demostrado lo indicado en **[1]** para variables discretas.

c. Para variable continua, por **[3]** de A.VAM II se tiene que:

$$m_{X+Y} = m_Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\,f^{XY}(xy)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^{XY}(xy)dy}_{f^{X}(x)} + \int_{-\infty}^{\infty} y\,dy \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^{XY}(xy)dx}_{f^{Y}(y)} =$$

(Ver **[9]** de VAM X)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f^{X}(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\,f^{Y}(y)\,dy = m_X + m_Y$$

Con lo cual queda demostrado lo indicado en **[1]** para variables continuas.

d. Por **[1]** y por el principio de inducción completa se demuestra que:

$$m_{X_1+\ldots+X_n} = m_{X_1} + \quad + m_{X_n} \qquad \textbf{[2]}$$

A.VAM IV

a. Se demostrará que:

$m_{X\cdot Y} = m_X \cdot m_Y$ <u>cuando X e Y sean independientes</u> **[1]**

b. Para (XY) discreta se tiene por **[2]** de A.VAM II que:

por ser X e Y independientes

$$m_{X\cdot Y} = m_Z = \sum_{\forall(x_i y_j)/P(X=x_i \cap Y=y_j)>0} x_i y_j\, P(X=x_i \cap Y=y_j) =$$

$$= \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0 \cap \forall y_j / P(Y=y_j)>0} x_i P(X=x_i)\, y_j\, P(Y=y_j) =$$

$$= \left[\sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i P(X=x_i)\right]\left[\sum_{\forall y_j / P(Y=y_j)>0} y_j P(Y=y_j)\right] = m_X \cdot m_Y$$

Con lo cual queda demostrado **[1]** para el caso de funciones discretas.

c. Para (XY) continua se tiene por **[3]** de A.VAM II que:

por ser X e Y independientes

$$m_{X\cdot Y} = m_Z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f^{XY}(xy)dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f^{X}(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f^{Y}(y)\, dy = m_X \cdot m_Y$$

Con lo cual queda demostrado **[1]** para el caso de funciones continuas.

A.VAM V

a. Se demostrará que:

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \quad \underline{\text{cuando X e Y sean independientes}} \quad \textbf{[1]}$$

b. Sea:

$$Z = X + Y$$

Se tiene por **[2]** y **[3]** de A.VAM I que:

$$m_{(Z-m_Z)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\forall z_i \,/\, P(Z=z_i)>0} (z_i - m_z)^2\, P(Z = z_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (z - m_z)^2\, f^{Z}(z)\, dz \end{array} \right\} \overset{\text{ver A.VAU IV}}{=} \sigma^2_Z \qquad \textbf{[2]}$$

c. Como:

$$Z = X + Y \qquad \textbf{[3]}$$

entonces, por **[1]** de A.VAM III:

$$m_Z = m_X + m_Y$$

y resulta entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} (Z - m_Z)^2 = [(X + Y) - (m_X + m_Y)]^2 = [(X - m_X) + (Y - m_Y)]^2 = \\ \qquad = (X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2 + 2\,(X - m_X)\,(Y - m_Y) = \end{array}\right\} \quad \textbf{[4]}$$

entonces por **[2]**, **[3]** y **[4]**:

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_Z = m_{(Z-m_Z)^2} = m\left[(X-m_X)^2 + (Y-m_Y)^2 + 2(X-m_X)(Y-m_Y)\right]$$

y por **[2]** de A.VAM III:

por ser $(X - m_X)$ e $(Y - m_Y)$
independientes y por **[1]** de A.VAM IV

$$\sigma^2_{X+Y} = \underbrace{m_{(X-m_X)^2}}_{\sigma^2_X} + \underbrace{m_{(Y-m_Y)^2}}_{\sigma^2_Y} + 2m_{(X-m_X)(Y-m_Y)} =$$

$$= \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\underbrace{m_{(X-m_X)}}_{0}\,\underbrace{m_{(Y-m_Y)}}_{0} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

Con lo que queda demostrado lo indicado en **[1]**.

d. Por **[1]** y por el principio de inducción completa resulta que:

$$\sigma^2_{X_1+\ldots+X_n} = \sigma^2_{X_1} + \ldots + \sigma^2_{X_n}$$ cuando $X_1, \ldots, X_n$ son todas independientes entre sí. **[5]**

Problemas sobre variables aleatorias multidimensionales

VAM.1 Dada $F^{XY}(xy)$ se pide hallar:

a) $P(Y \geq y \,/\, X = x)$

b) $P(Y < y \,/\, x_1 \leq X < x_2)$

VAM.2 Demostrar que si las variables aleatorias X e Y son independientes entonces los sucesos $\{x_1 \leq X < x_2\}$ y $\{Y < y\}$ también lo son.

VAM.3 Sea una mesa cuadrada de 1 m de lado. Considérese como origen de coordenadas al ángulo “sud – oeste” de la mesa. Se tira al azar una moneda sobre esta mesa. El resultado del experimento es la abscisa y la ordenada del punto sobre el cual cae el centro de la moneda.
Se asocia una variable X a la abscisa y una variable Y a la ordenada del punto de caída del centro de la moneda.
Se pide hallar la F de D y la f de d de la variable bidimensional (X,Y).

VAM.4 Dada una f de d $f^{XY}(xy)$ correspondiente a una distribución continua, se pide hallar $P(Y > y \,/\, X < x)$.

VAM.5 Supóngase que en forma independiente se elijan al azar dos números del intervalo [0,1[(esta elección podría efectuarse, por ejemplo, por el “método del reloj”). Sea *b* el primero de los números así hallados y sea *c* el segundo.
Indicar la probabilidad de que resulten reales las raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$.

VAM.6 Sea una bolsa con 4 bolillas azules y 6 blancas y otra con 5 azules y 5 blancas. Se sacar 3 bolillas de cada bolsa.
Sean X e Y las variables aleatorias correspondientes respectivamente a la cantidad de bolillas azules extraídas de las bolsas 1ª y 2ª. Se pide hallar $F^{XY}(xy)$.

VAM.7 Sea una f. de d.:

$$f^{XY}(xy) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \forall\ (xy)/x > 0 \cap y > 0 \\ 0 & \text{para todo otro } (xy) \end{cases}$$

Se pide hallar:

a) $P(X > 1)$; b) $P(a < X + Y < b)$; c) $P(X < Y \,/\, X \leq 2Y)$

VAM.8 Se eligen al azar dos números del intervalo [0,1[en forma independiente.
Indicar la F. de D. de:

a) El número que resulte mayor.

b) El número que resulte menor.

VAM.9 Sea la f. de d.:

$$f^{XY}(xy) = \begin{cases} 4xy & \forall\ (xy)/0 < x < 1\ \cap 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para todo otro } (xy) \end{cases}$$

Sea:

$V = X^2$ $\qquad W = Y^2$

Se pide hallar la F. de D. $F^{VW}(vw)$.

VAM.10 Sea la f. de d.:

$$f^{XY}(xy) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \forall\ (xy)/x > 0 \cap y > 0 \\ 0 & \text{para todo otro } (xy) \end{cases}$$

Sea:

$V = X + Y$ $\qquad W = X$

Se pide hallar las funciones:

a) $F^{VW}(v,w)$

b) $f^{W}(w)$